Musica Docta. Rivista digitale di Pedagogia e Didattica della musica, pp. 173-201

CARLA CUOMO
Bologna

APPRENDERE LA MUSICA ASSIEME ALLA MATEMATICA: *DOREMAT* TRA SPERIMENTAZIONE, RICERCA E DIDATTICA

A mio padre, docente di Matematica

Doremat: la Musica della Matematica. Insegnare e imparare la Matematica con la Musica è un libro pubblicato nel 2015.[1] Il libro è stato scritto da un gruppo di autori che riunisce docenti sia dell'Università sia dell'IeFP – Sistema di Istruzione e Formazione Professionale dell'Emilia Romagna – sia, infine, da insegnanti della scuola secondaria.[2] Il volume si rivolge ai docenti del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado e, solo per alcuni argomenti, ai docenti della scuola secondaria di primo grado.

Ma il termine 'Doremat' non designa solo un libro. *Doremat* consiste in un progetto scientifico e formativo, incentrato sull'insegnamento e sull'apprendimento interdisciplinare della Matematica e della Musica, tutt'oggi aperto a possibilità di sviluppo. Per comprenderne le caratteristiche e le potenzialità è utile ripercorrere l'*excursus* che ha condotto dall'idea iniziale al volume del 2015, e che poi ha portato da quest'ultimo sino ad una seconda pubblicazione del 2018, di cui si dirà tra poco. Lo scopo di questo articolo è di chiarire quali sono i fondamenti del progetto interdisciplinare e quali sono stati gli sviluppi nella ricerca sul campo e nella prassi dell'insegnamento successiva al libro del 2015, nonché l'espansione del progetto sino alla seconda pubblicazione e alla pratica didattica odierna.[3]

[1] © Copyright. All rights reserved. Editore: Digital Docet, Modena. Il volume è in formato e book, ed è reperibile online al seguente indirizzo internet *http://www.digitaldocet.it/le-collane-di-digital-docet/21-risorse-didattiche-digitali/46-doremat-la-musica-della-matematica-il-testo* (ultimo accesso, 30.09.2019).

[2] Curatrice: Denise Lentini. Prefazione di Bruno D'Amore, matematico, già Università di Bologna. Autori: Denise Lentini, già direttrice dell'ENFAP – Ente Nazionale per la Formazione e l'Apprendimento Professionale, appartenente all'IeFP-ER (Emilia Romagna) –; Carla Cuomo, musicologa, Università di Bologna; Giovanni Curti, direttore d'orchestra, già direttore della scuola di musica di Novellara (RE), insegnante di Musica nell'Istituto comprensivo "E. Fermi" di Reggio Emilia; Antonio Bianchi, percussionista classico, e Nicola Magnani, docente di matematica, entrambi già insegnanti nell'IeFP-ER; Rachele Vagni, insegnante di matematica nell'Istituto di Istruzione Superiore "Giordano Bruno" di Budrio (BO). Conclusioni di Giorgio Bolondi: matematico, Università di Bologna.

[3] Ringrazio Giovanni Curti e Rachele Vagni, che hanno seguito le sperimentazioni di *Doremat* in varie scuole tra quelle riportate nella *Tabella delle "scuole 'Doremat'"* (vd

https://musicadocta.unibo.it
ISSN 2039-9715

Il volume del 2015 è il frutto di un'esperienza didattica nata nelle scuole di formazione professionale dell'Emilia Romagna nel 2007. L'idea iniziale fu di Denise Lentini, dirigente di un ente di formazione professionale nell'IeFP-ER durante gli anni che portarono dall'esperienza didattica alla ricerca e al libro del 2015. L'idea nacque con lo scopo di aiutare gli studenti delle scuole professionali – per lo più orientati a mestieri come il falegname, l'estetista, il parrucchiere – a superare la dispersione e gli insuccessi scolastici. Tra gli studenti che scelgono questo tipo di formazione, i quali hanno un'età tra i 15 e i 18 anni, ve ne sono diversi che, provenendo da ambienti familiari e sociali svantaggiati, giungono in quelle scuole già gravati da enormi disagi. Al di là di questo, e più in generale, la scelta di percorsi professionalizzanti è motivata dal bisogno di acquisire una preparazione tecnica che introduca prima possibile nel mondo del lavoro. Le scuole professionali, dal canto loro, sono incentrate su attività pratiche, sul 'fare', integrate da pochi insegnamenti disciplinari, cioè da pochi 'saperi' di forte impatto teorico-concettuale, prima che procedurale. Tra essi c'è la Matematica, ma non la Musica. Nel sistema IeFP-ER la Musica, anzi, non era per nulla contemplata prima di *Doremat*. L'idea di Lentini fu perciò quella di «innestare la formazione ai saperi nella formazione ai mestieri»,[4] per contrastare la demotivazione all'apprendimento e l'insuccesso scolastico, soprattutto in Matematica.[5] L'introduzione della Musica nel sistema IeFP, più gradita ai giovani perché molto presente nel loro vissuto, doveva costituire la via di facilitazione all'apprendimento dei contenuti matematici, percepiti come astratti e lontani dalla realtà.

Prima ancora della pubblicazione del volume del 2015 l'esperienza didattica sopra descritta ha attirato l'attenzione di ricercatori universitari di entrambe le discipline su cui il progetto formativo sin dall'inizio si è incentrato. Nel biennio 2012-2013 gli studiosi hanno avviato una ricerca scientifica, volta a studiare l'applicazione di *Doremat* in scuole di vario tipo, e in prospettiva della partecipazione a un progetto europeo. Oltre a quelle professionalizzanti del si-

---

Appendice, pp. 200-201) e l'hanno anche attuato personalmente, per le importanti riflessioni che essi mi hanno restituito sulla prassi didattica di questo progetto formativo, nonché per la generosa disponibilità nella discussione di molte parti del presente articolo. Il controllo dei ragionamenti matematici qui esposti è stato effettuato da Rachele Vagni, che ringrazio anche per l'elaborazione della *Tabella*.

4 Affermazione di Lentini, esposta nel convegno *DoReMat. La musica della matematica*, Bologna, Palazzo Marescotti, 16 gennaio 2014. Notizie di questo convegno sono in: *http://wwcat.saggiatoremusicale.it/saggem/attivita/ER_Educazione_Ricerca_Invito_Convegno_Doremat.pdf* (ultimo accesso, 30.09.2019).

5 Cfr. Rapporto OCSE-Pisa 2012, a cura di INVALSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema di Istruzione), sulle competenze in Matematica, Lettura e Scienze, degli studenti quindicenni italiani: *https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/rappnaz/Rapporto_NAZIONALE_OCSE_PISA2012.pdf*. (ultimo accesso, 30.09.2019).

stema dell'IeFP dell'Emilia Romagna, sono stati selezionati il Liceo artistico "G. Chierici" di Reggio Emilia, il Liceo scientifico "San G. Calasanzio" di Empoli, gli Istituti professionali "R. Ruffilli" di Forlì e "P. Strocchi" di Faenza, e due scuole lettoni, la "Marupe Secondary School" e la "Jelgava Spidola Gymnasium", entrambe di Riga (scuole comparabili alla nostra secondaria di secondo grado). La ricerca è stata dunque validata a livello europeo nel 2013-2014 con un Progetto Leonardo,[6] ed è infine confluita nel volume del 2015, sia pure in parte.[7] Una successiva proposta editoriale, che ha richiesto d'inserire *Doremat* dentro a un preesistente manuale di Matematica, ha posto alcuni autori del volume del 2015 di fronte a una duplice sfida: dapprima ripensare i contenuti del primo volume in funzione dei destinatari del manuale di Matematica, ora diversi perché il manuale era rivolto agli studenti delle scuole secondarie di primo grado; poi, provare a ribaltare il rapporto tra le due discipline, giacché nel primo volume si era proceduti dall'individuare contenuti musicali che potessero facilitare l'apprendimento di contenuti matematici, mentre nella seconda pubblicazione si è talvolta, non in tutti i casi, proceduti al contrario. Nel 2018 sono stati così pubblicati i tre *Quaderni operativi* inseriti nel preesistente manuale di Matematica, perciò rinnovato.[8] I *Quaderni* sono rivolti ognuno a ciascuna classe delle scuole secondarie di primo grado e costituiscono, rispetto al manuale di Matematica, il momento di vera integrazione tra le due discipline.

L'articolato cammino che ha condotto dal volume del 2015 alla pubblicazione del 2018 ha influito sullo sviluppo di *Doremat* sotto diversi aspetti. Innan-

[6] Il Rapporto finale di valutazione di questo progetto è nel documento TOI 2012-1-IT1- LEO05-02810. *Decrease Obstacles Related to Mathematics Teaching – La Musica della Matematica. Trasferimento di metodologie innovative per l'insegnamento della matematica attraverso la musica*, CUP Code G32F12000060006, a cura di Berta Martini, che ha messo a punto il protocollo sperimentale e ha coordinato la sperimentazione del Progetto Leonardo per la parte matematica, insieme a Carla Cuomo per la parte musicale.

[7] La sperimentazione scientifica con il Progetto Leonardo si è basata solo su alcuni contenuti matematici e musicali, poi formalizzati nel volume del 2015, e in particolare: le frazioni e le espressioni aritmetiche (non quelle algebriche), come anche le proporzioni e le percentuali, trattate attraverso la durata dei valori musicali o di varie figurazioni ritmiche; le equazioni di primo grado, spiegate con le combinazioni di sequenze ritmico-melodiche; la posizione reciproca di due rette nel piano, trattata con l'andamento ascendente o discendente delle linee melodiche, anche sovrapposte (moto retto, moto contrario); alcuni poligoni (triangoli, quadrati, pentagoni esagoni) e alcune figure geometriche (le spezzate), rapportati all'argomento musicale dei raggruppamenti ritmici (terzina, quartina, quintina, ecc.).

[8] La richiesta editoriale è provenuta dalla De Agostini di Novara. Il preesistente manuale di Matematica è *Math Genius*, di Anna Montemurro, edito nel 2016 dalla suddetta casa editrice, anche in *e-book*. Il manuale è stato ripubblicato nel 2018 col titolo *Esatto!*, e rinnovato con l'inserimento dei *Quaderni operativi*. Tra questi, di quelli intitolati *Doremat: Matematica e Musica*, autori sono i medesimi del volume citato in principio di questo articolo, che ha il titolo dell'omonimo progetto.

ISSN 2039-9715

zitutto nel triennio si è esteso il campo delle scuole che hanno adottato il progetto formativo: un prospetto, aggiornato al 2019, è dato dalla *Tabella delle "scuole 'Doremat'"*, ossia delle scuole che hanno svolto, o svolgono tuttora, il progetto formativo (vd. Appendice, pp. 200-201).

L'estensione della sperimentazione di *Doremat*, talvolta empirica e non scientifica, perché avviata da docenti o di Matematica o di Musica che non necessariamente hanno ritenuto di mettersi in contatto con i ricercatori, ha comunque restituito a questi ultimi una riflessione didattica assai ricca. Per esempio, proprio quando nella viva prassi dell'insegnamento *Doremat* è stato intrapreso da docenti di Musica, piuttosto che da docenti di Matematica, si è cominciato a pensare che il rapporto tra le due discipline poteva essere invertito. Ci si è posti di fronte a sfide intellettuali, alla ricerca di nuovi collegamenti tra Musica e Matematica, prima inesplorati, da declinare sul piano didattico per un'alfabetizzazione in ambo i campi, ma anche per far progredire gli studenti oltre l'alfabetizzazione, verso livelli più elevati di competenza nelle due discipline.

Sicuramente l'estensione del campo di scuole che hanno fino ad oggi adottato *Doremat* esprime l'attrattività del progetto nel suo aspetto formativo, dovuta all'innovazione metodologico-didattica che esso promuove. Per comprendere tale innovazione, cuore del progetto e sostanza di ambo le pubblicazioni, è necessario illustrarne dapprima i principali aspetti, e poi attraverso qualche esempio entrare nel merito dei contenuti nel rapporto tra le due discipline.

I principali aspetti d'innovazione metodologico-didattica sono tre, di seguito partitamente illustrati.

Il primo consiste nel modo in cui vengono accostate le due discipline, invero contraddistinte da linguaggi ed epistemologie diverse e che qui sono messe in relazione sulla base non solo delle analogie ma anche delle differenze. Per fare un esempio, si pensi alla rappresentazione sul piano aritmetico delle strutture ritmiche mediante le frazioni: l'argomento aritmetico delle frazioni offre la possibilità di rappresentare la minima con la scrittura '$\frac{1}{2}$'. Al contempo, però, se in Matematica '$\frac{1}{2}$' e 'la metà', o '$\frac{2}{4}$' e 'un mezzo', oppure ancora '$\frac{4}{8}$' e 'due quarti', esprimono lo stesso concetto, in Musica non è così, giacché le medesime frazioni esprimono valori di durata diversi. Tra $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ il senso musicale cambia in base alla scelta che il compositore attua tra due semiminime e quattro crome per battuta. Questo semplice esempio permette di comprendere, almeno sul piano generale, come gli studenti siano entrati a fondo nelle due discipline, cogliendone i punti d'intersezione e al contempo di differenza.

In secondo luogo va considerato il trattamento laboratoriale dei contenuti. A partire da un contesto musicale praticato, che viene problematizzato, gli studenti giungono a scoprire, inventare, decostruire e ricostruire concetti matematici e musicali. Il laboratorio è qui inteso nel più stretto senso deweyano, quale luogo di "esperienza riflessiva", cioè un'esperienza con cui gli studenti imparano a connettere i fatti con le loro conseguenze, e, in virtù della riflessione, colgono, a un ulteriore livello, la qualità di quel rapporto.[9] Quest'impostazione di *Doremat* ha permesso di organizzare percorsi dal concreto all'astratto, cioè dalla musica esperibile fisicamente, tecnicamente e uditivamente, agli enunciati, teoremi, proposizioni e definizioni matematiche, che difficilmente sarebbero stati appresi. Tutto ciò è avvenuto addirittura con piacere e perciò con successo sul piano formativo.[10]

In terzo e ultimo luogo, va considerata sia la compresenza degli insegnanti di Matematica e di Musica in ogni unità d'apprendimento, sia il lavoro di gruppo tra gli studenti in ogni fase didattica. La compresenza tra i docenti delle due discipline si è dimostrata una risorsa preziosa per favorire un'esperienza formativa significativa. Prima di tutto è stata fondamentale per progettare *Doremat*, ed

---

[9] Nel suo celeberrimo *Democrazia e Educazione* (1916), nel paragrafo *La riflessione nell'esperienza*, Dewey spiega con precisione cosa intenda per "esperienza riflessiva". Riporto qui di seguito la citazione testuale del passo che ha costituito un fondamento dell'impostazione laboratoriale di *Doremat*: «Il pensiero o la riflessione […] è il discernimento della relazione fra quel che cerchiamo di fare e quel che succede in conseguenza. Nessuna esperienza che abbia un significato è possibile senza qualche elemento di pensiero. Ma possiamo contrapporre due tipi di esperienza secondo la proporzione di riflessione che vi troviamo. In tutte le nostre esperienze c'è uno stadio di "prova a tentoni", ciò che gli psicologi chiamano il metodo: "tentativo ed errore". Noi ci limitiamo a fare qualcosa e quando fallisce facciamo qualcos'altro, e continuiamo a provare finché si casca su qualcosa che va bene, e allora adottiamo quel metodo come una regola approssimativa per i procedimenti seguenti. Ci sono esperienze che vanno di poco oltre questo processo di provare e stare a vedere gli effetti. Si scorge la connessione tra un certo modo di agire e una determinata conseguenza, ma non si vede il *come* della connessione; non se ne scorgono i dettagli; mancano degli anelli alla catena. Il nostro discernimento è molto rudimentale […]. Nella scoperta delle connessioni dettagliate delle nostre attività e di ciò che avviene in conseguenza, il contenuto di pensiero, implicito nel "provare a tentoni", è qui svolto, diviene quantitativamente maggiore e ha, in proporzione, un valore ben differente. Perciò cambia la qualità dell'esperienza; il cambiamento è così significativo che possiamo chiamare questo tipo di esperienza riflessivo, cioè riflessivo eminentemente. Il coltivare deliberatamente questa fase di pensiero costituisce il pensare come esperienza a sé. Pensare è, in altre parole, il tentativo intenzionale di scoprire delle connessioni specifiche fra qualcosa che facciamo e le conseguenze che ne risultano, in modo che le due cose diventino continue. […] Pensare equivale pertanto a un cosciente estrarre l'elemento intelligente della nostra esperienza»: J. DEWEY, *Democrazia e educazione*, con un saggio introduttivo di C. Sini, trad. it. di E. Enriques Agnoletti e P. Paduano, Milano, Sansoni, 2004, pp. 157-158.

[10] Per il successo formativo di *Doremat* vedasi il Rapporto finale di valutazione del Progetto Leonardo, qui menzionato nella n. 6. Ulteriore conferma di tale successo è nella diffusione che *Doremat* sta conoscendo dal 2012 a oggi (vd. *Tabella* in Appendice, pp. 200-201; al momento in cui esce questo articolo altre scuole hanno in progetto di adottarlo).

ISSN 2039-9715

è stata il punto di partenza della sua trasformazione da idea a percorso formativo. È da considerare, infatti, che la compresenza è stata utile agli insegnanti per evitare che, se avessero lavorato separatamente, ciascuno facesse scelte didattiche insidiose: per esempio, il trattamento delle frazioni da parte del solo docente di Musica avrebbe con probabilità ignorato tutti i possibili significati del concetto di frazione in Matematica.

La compresenza è stata utilissima, poi, per la comprensione da parte degli studenti delle specificità delle differenze tra Matematica e Musica. Il *co-teaching* ha infatti permesso d'integrare le prospettive di ciascun insegnante in modo davvero interdisciplinare,[11] ed è stato perciò il fondamento del successo formativo rispetto allo sviluppo negli studenti di forti competenze disciplinari, musicali e matematiche. Esso è stato inoltre fondamentale nel calibrare l'intervento didattico rispetto ai tempi e agli stili di apprendimento di ciascuno studente; soprattutto tenuto conto dei contesti scolastici sopra descritti in cui *Doremat* è stato inventato e sperimentato in prima battuta. Si può perciò dire che la compresenza ha costituito un punto di forza per una didattica davvero innovativa e anche inclusiva.[12]

Oltre alla compresenza, è stato fondamentale il lavoro di gruppo tra gli studenti, perché essi hanno imparato a problematizzare, a formulare ipotesi e soluzioni, a confutarle o a verificarle, nelle varie situazioni matematico-musicali, maturando così anche capacità nel confronto personale, nella discussione di gruppo, nel rispetto necessario per ascoltare sino in fondo l'opinione altrui, nel ragionamento per sostenere una direzione di lavoro o un'altra, sviluppando perciò anche competenze di cittadinanza.[13]

Per quanto riguarda i contenuti, gli sviluppi posteriori alle pubblicazioni dei volumi del 2015 e del 2018, la parallela ricerca sul campo e nella prassi

---

[11] Nel senso che Umberto Margiotta precisa, quando specifica dapprima il concetto di 'disciplinarità' rispetto al quale egli definisce quello di 'interdisciplinarità', e lo distingue perciò da quelli di 'multidisciplinarità', 'pluridisciplinarità', 'transdisciplinarità': «interazione esistente tra due o più discipline; tale interazione può andare dalla semplice comunicazione d'idee fino all'integrazione reciproca dei concetti ispiratori dell'epistemologia, della terminologia, della metodologia, delle procedure»: U. MARGIOTTA, *Interdisciplinarità: un'idea di Università nel secolo XXI,* in *Educazione musicale e Formazione*, a cura di G. La Face Bianconi e F. Frabboni, Milano, FrancoAngeli, 2008, pp. 317-345: 319. Nel caso di *Doremat* si è lavorato proprio sull'integrazione di Musica e Matematica, soprattutto a livello epistemologico, metodologico e procedurale.

[12] Sulla compresenza didattica un utile riferimento può essere *Compresenza didattica inclusiva: indicazioni metodologiche e modelli operativi di co-teaching*, a cura di D. Ianes e S. Cramerotti, Trento, Erickson, 2015.

[13] Un approfondimento di questo aspetto di *Doremat* è in C. CUOMO, *Musica e Matematica per formare intelligenza e civiltà*, in *Pedagogia dell'espressione artistica*, Atti del convegno (Bologna, 21-22 marzo 2018), a cura di M. Caputo, Milano, FrancoAngeli, in corso di pubblicazione.

dell'insegnamento, e gli aggiornamenti più recenti, come già sopra accennato hanno influito nel senso di una loro espansione.

La primigenia direzione del progetto *Doremat*, imparare la Matematica attraverso la Musica, per gli autori del volume del 2015 sul piano dell'elaborazione ha implicato che la priorità fosse scegliere contenuti musicali adatti alla trasposizione di specifici contenuti matematici che dovevano essere insegnati, come qui poco sopra si è accennato. Ciò ha comportato che si studiassero dapprima le modalità per mettere in relazione le due discipline su alcuni nuclei concettuali fondanti comuni. Il punto di partenza è stato, dunque, la ricerca delle analogie tra Matematica e Musica. In particolare, sono stati individuati alcuni contenuti matematici per lo più di tipo aritmetico, algebrico e geometrico, che potevano essere messi in relazione con contenuti musicali riguardanti il ritmo, l'armonia, la teoria musicale, e solo più raramente la storia della musica. Poi, dallo studio delle analogie sono emerse anche le differenze, almeno rispetto ai contenuti musicali e matematici individuati.

Sebbene la scelta dei contenuti all'inizio del progetto abbia avuto una direzione unilaterale, dalla Musica alla Matematica, per via delle specifiche ragioni della sua genesi, negli sviluppi della prassi didattica *Doremat* si è prestato a esperimenti anche in direzione inversa, dunque come percorso formativo dalla Matematica alla Musica. Gli studenti hanno perciò maturato il coordinamento dei diversi registri di rappresentazione matematica che sono stati affrontati nel progetto, e hanno sviluppato il *problem solving* come metodo di apprendimento, insieme in particolare a uno stile cognitivo gestaltico, che fa uso di capacità di tipo spaziale, nonché analitico, quest'ultimo esercitato attraverso l'aspetto verbale. Inoltre, essi hanno imparato a collegare l'ascolto musicale all'esecuzione e a un minimo di capacità d'invenzione musicale, secondo un modello pedagogico e didattico che mira a educare a comprendere la musica come sapere storico-culturale.[14] Per dare un'idea del percorso di "andata e ritorno", propongo

[14] Per una rapida comprensione organica del modello pedagogico e didattico musicale al quale qui mi riferisco si considerino: *Educazione musicale e Formazione*, a cura di G. La Face Bianconi e F. Frabboni, Milano, FrancoAngeli, 2008; G. LA FACE BIANCONI, *Il cammino dell'Educazione musicale: vicoli chiusi e strade maestre*, in *Educazione musicale e Formazione* cit., pp. 13-25; C. CUOMO, *Dall'ascolto all'esecuzione. Orientamenti per la Pedagogia e la Didattica della musica*, Milano, FrancoAngeli, 2018. Nondimeno, numerosi riferimenti bibliografici si trovano nella "Biblioteca elettronica" dell'Associazione culturale «Il Saggiatore musicale»: *https://www.saggiatoremusicale.it/home/biblioteca-elettronica/testi-di-pedagogia-musicale/* (ultimo accesso, 30.09.2019). Per la didattica della matematica, punti di riferimento per *Doremat* sono stati gli studi di Bruno D'Amore, per i quali in questa sede rinvio solo a *Elementi di Didattica della Matematica*, Bologna, Pitagora,1999 e a *Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica"*, in «La Matematica e la sua didattica», 1, pp. 4-30. Inoltre, per l'importanza delle rappresentazioni semiotiche nell'apprendimento di un oggetto matematico, rimando a R. DUVAL, *Registres de re-*

alcuni esempi che illustrano come alcuni contenuti musicali e matematici siano stati collegati. Negli esempi scelgo di partire dagli argomenti musicali, perché la destinazione di questo articolo è una rivista di Pedagogia e Didattica della musica.

1) La *conoscenza degli organici musicali* e la *classificazione degli strumenti musicali* è stata rapportata all'argomento matematico degli *insiemi*. Questo collegamento è possibile perché in Matematica gli insiemi sono collezioni di oggetti (concreti o astratti), ossia oggetti che possono essere raggruppati attraverso la definizione di un criterio o di determinate caratteristiche. Per esempio, l'insieme degli aerofoni è costituito dagli strumenti musicali il cui suono è prodotto da una colonna d'aria vibrante all'interno dello strumento; un flauto, quindi, appartiene a questo insieme, in quanto possiede la suddetta caratteristica. Per capire se un oggetto appartenga o meno a un dato insieme occorre comprendere, dalla descrizione dell'oggetto stesso (o da una sua rappresentazione, figurativa o mentale), le sue caratteristiche, distinguendo le une dalle altre, per verificare se vi sia o meno la proprietà che definisce l'insieme. Occorre, dunque, applicare ed allenare la capacità di analisi e di sintesi.

2) L'*apprendimento delle durate delle figure musicali*, con le loro possibili combinazioni in varie figurazioni ritmiche, così come l'apprendimento del concetto di 'battuta', è stato promosso attraverso l'argomento delle *frazioni*, declinate anche in Musica. Il collegamento è possibile, sul piano interdisciplinare, perché le frazioni in Matematica hanno diversi significati; uno dei possibili è quello di "rapporto tra grandezze variabili" (ossia rapporto tra proprietà misurabili di oggetti, il cui valore può variare). La frazione, quindi, costituisce uno strumento decisamente adeguato per la rappresentazione dei rapporti tra le durate delle figure musicali. Inoltre, stabilito un intero, che per la musica si fa coincidere con il valore della semibreve, gli studenti apprendono che è possibile associare a tutte le altre figure musicali una frazione che ne indica la durata rispetto all'intero: alla minima la frazione $\frac{1}{2}$, perché $\frac{1}{2}$ è la metà di 1, alla semiminima la frazione $\frac{1}{4}$, perché $\frac{1}{4}$ è la metà di $\frac{1}{2}$, e così via. Essi hanno così svolto un'attività di matematizzazione, intesa come rappresentazione e trattazione in termini matematici di fatti e situazioni, al fine di comprendere, conoscere e interpretare meglio tali fatti. L'attività di matematizzazione su questo contenuto ha permesso altresì di comprendere che, nella concreta prassi musicale, cambia il senso tra una frase musicale scritta con tempo $\frac{1}{2}$ e una frase musicale scritta con tempo $\frac{1}{4}$, mentre non cambia il senso sul piano matematico. Sul piano

présentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, in «Annales de Didactique et de Sciences Cognitives», ULP, IREM Strasbourg», 5, 1993, pp. 37-65, e per gli aspetti didattici nell'insegnamento delle frazioni a M. I. FANDIÑO PINILLA, *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*, Bologna, Pitagora, 2005.

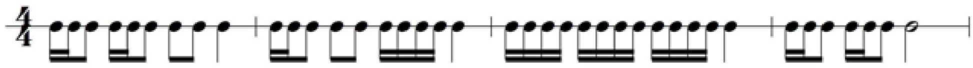
dell'apprendimento, proprio il collegamento tra le due discipline su questi contenuti ha portato a ottimi risultati. Tradizionalmente nell'insegnare la sola Musica si arriva a spiegare le durate di suoni e pause, e le proporzioni tra esse, attraverso l'esempio classico della torta e delle sue suddivisioni, utile anche a far capire la rappresentazione dei rapporti tra le durate tramite le frazioni. D'altro canto, nell'insegnare la sola Matematica si suole fare spesso riferimento allo stesso esempio, ma esso determina un apprendimento fragile delle frazioni perché, quando il docente pone agli studenti domande per verificare la comprensione delle nozioni insegnate in teoria, gli studenti dimostrano uno scollamento dalla realtà. Ad esempio: alla domanda "quant'è la metà di $\frac{1}{2}$", spesso essi rispondono "uno", mentre la risposta corretta è "$\frac{1}{4}$".[15] L'insegnamento congiunto di Musica e Matematica permette invece un apprendimento più efficace perché, quando con *Doremat* gli studenti collegano le frazioni alle durate di suoni e pause grazie all'esecuzione sincronica di due sequenze, prima limitata alla mera scansione del ritmo (senza altezze), poi corredata della melodia, essi esperiscono sul piano pratico il concetto di proporzione tra le durate, rispetto alla Musica, e comprendono in modo più significativo il rapporto tra frazioni, rispetto alla Matematica, perché lo agganciano alla realtà. Da quest'ultimo punto di vista, gli studenti danno concretezza all'argomento matematico delle frazioni perché da subito sviluppano una *forma mentis* che integra in modo simultaneo i due tipi di ragionamento, musicale e matematico. Aspetto importante è inoltre il fatto che l'esecuzione, sia solo ritmica sia melodica, faccia scattare una notevole motivazione nell'apprendere un argomento tradizionalmente ostico; e tale motivazione nella prassi didattica è risultata più determinante che non l'esempio della classica torta per l'efficacia dell'apprendimento: nel Progetto Leonardo gli studenti si sono dimostrati più coinvolti e partecipi nell'apprendere le frazioni grazie all'esecuzione solo ritmica e melodica.[16]

3) La *comprensione della logica combinatoria delle durate musicali* con la quale può essere composta ogni unità di tempo in una sequenza ritmica, sulla base del metro indicato, è stata sostenuta con la loro rappresentazione mediante *espressioni aritmetiche* ad esse corrispondenti. Le frazioni che rappresentano le durate delle figure ritmiche possono essere messe insieme, ossia collegate tra di loro, attraverso le operazioni di addizione e di moltiplicazione. L'addizione tra numeri è un'operazione che, concretamente, ci consente di contare alcuni oggetti; così, la concatenazione di figure musicali, può essere rappresentata in Matematica con l'operazione di addizione tra frazioni. La moltiplicazione di una frazione per un numero intero può rappresentare la ripetizione di una certa figura

[15] Oltre che essere, questo, un problema generale dell'apprendimento della Matematica, di fatto esso è emerso anche durante la sperimentazione di *Doremat* col Progetto Leonardo: si veda il Rapporto finale di valutazione già citato in nota 6.

[16] Rinvio sempre al relativo Rapporto finale di valutazione appena ricordato.

musicale o di un *pattern* di figure (Fig. 1):



$$\left(\frac{2}{16}+\frac{1}{8}\right)\times 2+\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{4}{16}+\frac{1}{4}+\frac{4}{16}\times 3+\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{16}+\frac{1}{8}\right)\times 2+\frac{1}{2}$$

Figura 1 – Rappresentazione aritmetica di un *pattern* di figure ritmiche.

Anche in questo caso, come nel precedente, gli studenti compiono un'attività di matematizzazione.

4) La *scrittura di sequenze ritmiche inventate* dagli studenti è stata rafforzata mediante la rappresentazione delle stesse sequenze con *espressioni aritmetiche*. L'attività di matematizzazione consiste proprio nella rappresentazione in scrittura aritmetica delle sequenze ritmiche. Ciò che in quest'attività differisce dalla precedente è l'invenzione musicale da parte degli studenti, che è un'attività importante per sviluppare la loro creatività, non in modo spontaneistico ma controllato, cioè a partire da un progetto, in tal caso matematico. È stata anche trattata l'invenzione di espressioni aritmetiche, il risultato delle quali sia un numero intero e le quali siano rappresentabili in musica attraverso una sequenza ritmica (Fig. 2):

$$\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{4}{16}+\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{16}+\frac{2}{8}\right)\times 2$$

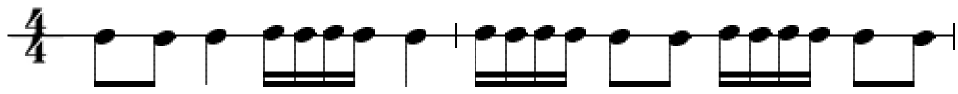


Figura 2 – Rappresentazione ritmica di un'espressione aritmetica.

In quest'ultima attività gli studenti devono avere sempre il controllo del calcolo (per esempio chiedendosi, ad un certo punto: "a che numero sono arrivato addizionando queste frazioni che ho scritto?"); inoltre, un certo numero può essere la somma (ossia il risultato di un'addizione) di diverse sequenze di numeri. Ad esempio, il numero 1 può essere scritto additivamente nei due seguenti modi (Fig. 3):

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{4}{16} + \frac{1}{4}$$

Figura 3 – Due possibili modi di scrivere in matematica il numero 1.

Similmente a quanto esposto in *2*), pure in tal caso, se le due scritture esprimono lo stesso concetto matematico (la scrittura additiva del numero 1), gli studenti comprendono che esse, qualora tradotte in valori musicali, darebbero luogo a due sequenze ritmiche di senso diverso.

5) L'*intendimento delle relazioni tra le durate musicali all'interno di precise sequenze ritmiche* è stato consolidato attraverso la rappresentazione delle stesse sequenze in *equazioni intere* e *lineari*, e viceversa. Le equazioni in matematica, oltre ad essere uno degli oggetti di studio fondamentali della disciplina, costituiscono un potente ed efficace strumento con il quale stabilire relazioni tra grandezze e risolvere molti problemi della realtà.[17] Si propone qui un esempio che risulta già "avanzato" nella trattazione delle equazioni. Si supponga di dare agli studenti il compito di eseguire la seguente sequenza ritmica composta di due parti, A e B, ove nella prima parte mancano alcune durate (indicate dai punti interrogativi; Fig. 4):

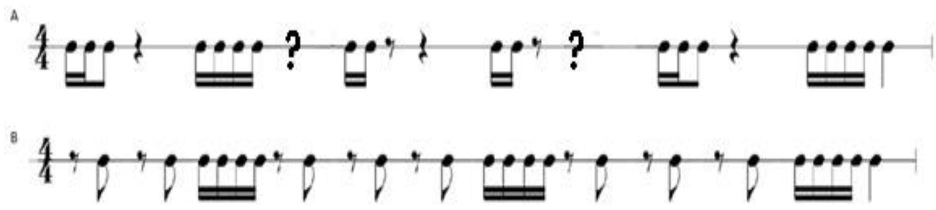


Figura 4 – Sequenza ritmica a due parti (A e B) con alcune durate mancanti nella prima.

La sequenza è volutamente scritta senza suddivisione in battute, perché questa dovrà essere definita dagli studenti stessi. Il compito di esecuzione in duo risulta impossibile se dapprima non si determina il valore di durata delle figure mancanti in A. Ci sono diverse strategie che si possono mettere in campo per risolvere questo problema. Nella prassi dell'insegnamento gli studenti

[17] Le applicazioni della matematica si ritrovano in altre discipline, più agganciate all'esperienza pratica quotidiana. Una di queste è la fisica, in cui si parla di "equazioni di un moto di un corpo". In quest'àmbito, ecco un esempio: data un'auto in corsa, per descrivere la relazione che lega lo spazio percorso dall'auto alla sua velocità e in un determinato tempo si usa un'equazione di primo grado.

sono giunti sovente alla soluzione comparando le durate delle parti A e B: la comparazione procede prima definendo il numero di battute della sequenza B, proprio perché essa non contiene punti interrogativi. Analizzandola rispetto al metro, gli studenti comprendono che essa è suddivisibile in 3 battute da $\frac{4}{4}$; di conseguenza, anche la sequenza A deve essere composta da 3 battute; le figure mancanti in A devono perciò avere una durata pari a $\frac{1}{4}$ ciascuna. È un ragionamento che sul piano matematico può essere formalizzato attraverso un'equazione, in cui la lettera x rappresenta la durata (incognita) di ciascuna delle figure ritmiche:

$$\frac{2}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{4}{16}+x+\frac{2}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{1}{8}+x+\frac{2}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{4}{16}+\frac{1}{4}=3$$

Figura 5 – Equazione corrispondente alle parti A e B di Fig. 4.

La Fig. 5 rappresenta matematicamente, con un'equazione, che la parte A, qui indicata a sinistra del segno di uguaglianza, è pari a 3 battute. Risolvendo l'equazione (Fig. 6) si scopre che il valore dell'incognita è $\frac{1}{4}$:

$$\frac{3}{4}+x+\frac{3}{4}+x+\frac{4}{4}=3$$

$$2x+\frac{10}{4}=3$$

$$2x=3-\frac{10}{4}$$

$$2x=\frac{12}{4}-\frac{10}{4}$$

$$2x=\frac{2}{4}$$

$$x=\frac{1}{4}$$

Figura 6 – Risoluzione dell'equazione di Fig. 5 che dà il valore dell'incognita.

Come sempre, nel caso delle frazioni, si farà infine notare agli studenti che, mentre sul piano matematico i numeri $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{16}$ costituiscono la stessa e unica soluzione (perché le frazioni scritte sono tra di loro equivalenti, ossia esprimono lo stesso numero razionale), sul piano musicale si ottengono invece diverse possibili soluzioni dalla combinazione dei valori musicali corrispondenti a quelle frazioni.

6) La *comprensione della durata di una sequenza ritmica in funzione di una determinata velocità metronomica*, è stata approfondita grazie agli argomenti matematici dei *rapporti* e delle *proporzioni*. In matematica la proporzionalità è una relazione che lega due grandezze variabili. Esistono vari tipi di proporzionalità: diretta, inversa, quadratica, ecc. Se si eseguisse una sequenza ritmica ad una certa velocità, la sequenza avrebbe una certa durata. Se si raddoppiasse la velocità di esecuzione della stessa sequenza ritmica (o più in generale di un brano) la durata dell'esecuzione risulterebbe dimezzata rispetto all'esecuzione precedente. In questo caso, velocità metronomica e durata sono due grandezze inversamente proporzionali, perché al raddoppiare dell'una l'altra dimezza. Lo si può verificare sperimentalmente utilizzando un cronometro e un metronomo: analizzando i dati ottenuti si può concludere che si tratta di una relazione di proporzionalità inversa. Quest'attività costituisce un duplice laboratorio di Musica e Matematica: mentre alcuni studenti si esercitano nel sincronizzarsi durante l'esecuzione musicale, cioè mentre imparano ad "andare a tempo", altri realizzano al contempo un vero e proprio esperimento di Matematica applicata alla Fisica, poiché devono registrare dati relativi al fenomeno di velocità di esecuzione della sequenza, cioè devono raccogliere col cronometro l'intervallo di tempo che intercorre dall'inizio alla fine di esecuzione della stessa (per esempio: 1'), e devono interpretare tali dati attraverso relazioni matematiche.

7) La *conoscenza delle figure ritmiche irregolari* è stata conseguita attraverso il parallelo con le *figure geometriche piane*. In geometria le figure piane sono descritte attraverso alcune loro proprietà, ossia mediante specifiche caratteristiche. Per esempio, un rombo è un poligono che ha quattro lati tra loro uguali, o meglio, matematicamente parlando, congruenti; se poi, oltre a questa proprietà, il poligono possedesse anche quella di avere gli angoli interni tra loro congruenti, allora esso sarebbe un quadrato. La definizione di queste proprietà è l'unica cosa che distingue una figura piana da un'altra; inoltre, due figure piane possono avere in comune una stessa caratteristica, ad esempio il quadrato e il rombo hanno entrambi quattro lati tra di loro congruenti. Un altro aspetto fondamentale delle figure piane consiste nel fatto che la loro classificazione prescinde dalla misura dei loro lati o angoli: da un certo punto di vista, non interessa che un quadrato abbia un lato che misura 8 cm o 3 cm, si tratta sempre di un quadrato, a prescindere dalle misure dei suoi lati. Quindi, la piena comprensione delle figure piane (ad esempio quadrato, triangolo, cerchio, deltoide, ecc.) avviene attraverso un processo di astrazione, che arriva a comprendere e a saper individuare le proprietà caratteristiche di particolari figure piane. Come avviene per tanti altri concetti astratti della matematica, anche per le figure piane possiamo individuare nella realtà alcune loro rappresentazioni concrete, cioè alcuni oggetti che, per le caratteristiche che presentano, possono essere assimilabili a un certo modello: posso riconoscere in una piastrella di un pavimento alcune proprietà che sono tipiche del concetto del quadrato, e dunque affermare che quella piastrella ha una forma quadrata, oppure individuare in un aquilone le proprietà del deltoide;[18] e così via. In *Doremat*, questo paragone è avvenuto tra figure piane e alcune figure ritmiche irregolari. Come mostrato nell'esempio che segue, si chiede agli studenti di associare un raggruppamento ritmico ad una figura piana, motivando la risposta, ossia individuando le caratteristiche comuni ai due oggetti (uno della musica, il raggruppamento ritmico, e uno della matematica, la figura piana). Per alcune associazioni non esiste una sola risposta corretta, ma corrispondenze più o meno pertinenti. Cioè: se per la terzina l'unica associazione possibile è il triangolo equilatero, perché questo ha come proprietà la congruenza dei tre lati, che è rapportabile alla medesima durata delle tre note della terzina (dunque non si può associare alla terzina il triangolo isoscele perché in questo uno dei tre lati non è congruente agli altri due), invece alla quartina si possono associare due figure piane, il quadrato e il rombo, perché entrambe hanno tutti e quattro i lati congruenti tra di loro. La consegna agli studenti potrebbe pertanto essere: "associa ad ogni raggruppamento ritmico una o più figure geometriche, scegliendo tra quelle proposte" (Fig. 7):

[18] Il deltoide è una figura piana composta da quattro lati, di cui due lati consecutivi devono essere tra loro congruenti. Di solito, si afferma che l'aquilone abbia la forma di un rombo, ma di fatto esso non ha tutti e quattro i lati congruenti come il rombo, ma ne ha solo due: perciò è un deltoide.

ISSN 2039-9715

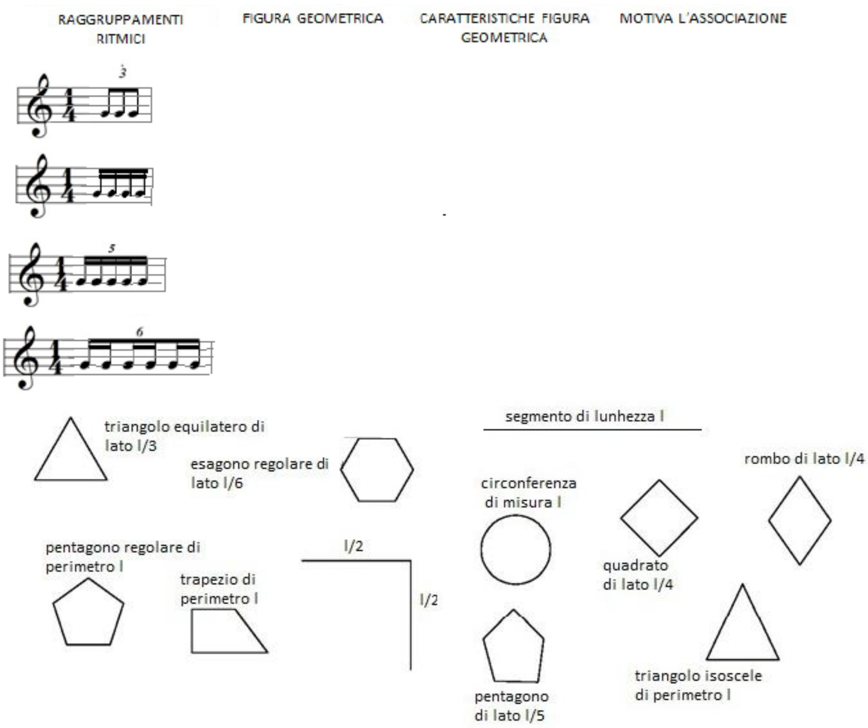


Figura 7 – Compito per gli studenti: associare una o più figure geometriche a ciascun raggruppamento ritmico dato.

La soluzione del compito, che nell'esempio seguente contiene tutte le corrispondenze pertinenti, è la seguente:

Figura 8 – Soluzione del compito di Fig. 7.

8) L'*invenzione di sequenze ritmiche complesse, anche eseguite simultaneamente*, è stata incentivata mediante la loro rappresentazione con i *sistemi di equazioni lineari*. Questo punto consiste in un'estensione degli argomenti proposti nel punto *5)*. Nei sistemi di equazioni le incognite sono più di una; in *Doremat* abbiamo trattato i sistemi di due equazioni a due incognite; in tali equazioni ciascuna incognita rappresenta un valore musicale (suono o pausa) o una figurazione ritmica (Fig. 9):

$$\begin{cases} x + \frac{2}{8} + \frac{1}{2} = \frac{4}{16} + \frac{1}{4} + y \\ 2y = 4x \end{cases}$$

Figura 9 – Sistema di due equazioni a due incognite.

La corrispondente sequenza, con le incognite matematiche rappresentate dai punti interrogativi, è quella della Fig. 10, a quattro parti. In essa si stabilisce che le incognite relative ai valori musicali o alle figurazioni ritmiche mancanti sono due: una è il punto interrogativo che compare nella parte A, la quale esprime la stessa figura incognita rappresentata da ciascuno dei punti interrogativi posti nella parte D (e che nella rappresentazione matematica indichiamo con la lettera *x*); l'altra è il punto interrogativo che compare nella parte B, che esprime lo stesso valore o la stessa figurazione ritmica incognita rappresentata da ciascuno dei punti interrogativi posti nella parte C dello stesso esempio (e che nella rappresentazione matematica indichiamo con la lettera *y*):[19]

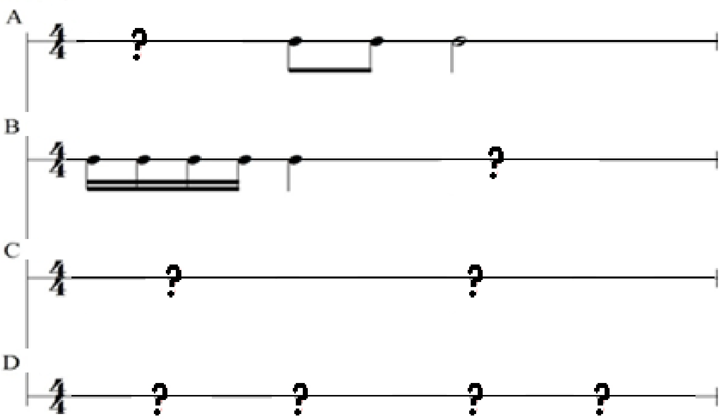


Figura 10 – Rappresentazione ritmica a quattro parti corrispondente al sistema di due equazioni a due incognite di Fig. 9.

[19] Questa precisazione si è resa necessaria perché il lettore potrebbe chiedersi come mai non si rappresentino tutti gli otto punti interrogativi di Fig. 10 con una sola lettera, ad esempio x, oppure con lettere tutte diverse tra loro.

La risoluzione del sistema a due incognite di Fig. 9 è la seguente (Fig. 11):

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{4}+y \\ y=2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{4}+2x \\ y=2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{4}=x \\ y=2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}=x \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Figura 11 – Risoluzione de sistema di due equazioni a due incognite di Fig. 9.

La rappresentazione musicale del sistema risolto è infine questa (Fig. 12):

Figura 12 – Sequenza ritmica a quattro parti, corrispondente al sistema di due equazioni a due incognite di Fig. 9, con la risoluzione dei punti interrogativi di Fig. 10.

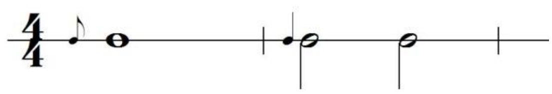
Se nella Fig. 5 l'equazione a un'incognita rappresentava una sequenza ritmica a due parti – utile per quanto descritto nel punto *5)* –, ora servono due equazioni per rappresentare, ciascuna, due parti di una sequenza, come è evi-

ISSN 2039-9715

dente nelle Figg. 9 e 10. Ecco perché la sequenza ritmica corrispondente a un sistema di due equazioni è a quattro parti, come si evince dalle Figg. 10-12.

Questi pochi esempi permettono di constatare che gli argomenti trattati in entrambe le pubblicazioni sono comuni a scuole secondarie di primo e di secondo grado, altri sono insegnati solo in quest'ultimo tipo di scuole. È necessario aggiungere che nello sviluppo della ricerca seguita al volume del 2015 è emersa l'esigenza di trattare alcuni argomenti per nulla affrontati in questo volume, e di portarne avanti altri che vi erano stati appena accennati. I seguenti punti *9)*, *10)* e *11)*, elencano, rispettivamente, un argomento presente *ex novo* nella pubblicazione del 2018, e due altri argomenti abbozzati nel volume del 2015 e che sono stati ampliati nella seconda pubblicazione.

9) L'*appoggiatura musicale* è stata introdotta per la prima volta nella pubblicazione del 2018 mediante l'argomento aritmetico della *sottrazione tra frazioni*. Dal momento che l'appoggiatura sottrae alla nota principale il valore che essa stessa esprime, si può utilizzare la sottrazione tra frazioni per rappresentare lo stesso concetto nella corrispondente scrittura matematica (Fig. 13):



$$\frac{1}{8}+\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{4}$$

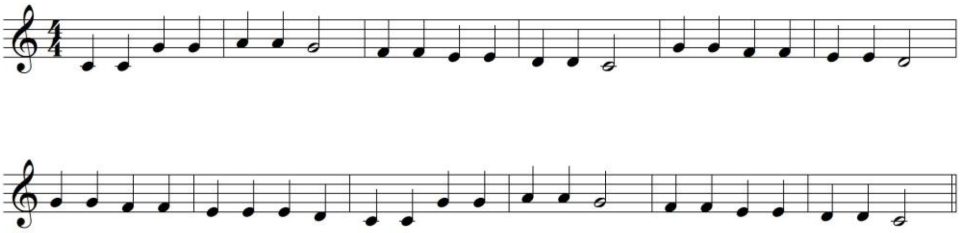
Figura 13 – Frase ritmica con appoggiatura e sua rappresentazione aritmetica mediante la sottrazione tra frazioni.

Ci si potrebbe chiedere a cosa giovi "complicare" l'apprendimento musicale dell'appoggiatura attraverso non la semplice sottrazione, ma addirittura la sottrazione tra frazioni. Sul piano esclusivamente musicale, questo argomento matematico non sarebbe di per sé necessario. Ma *Doremat*, come si è ampiamente affermato, è un progetto che mira a integrare le due discipline nei loro fondamenti epistemologici, e non semplicemente ad accostarle: ogni valutazione del progetto, e delle integrazioni realizzate, va compiuta tenendo presente questo fondamento concettuale. Pertanto, poiché nel volume del 2015 non erano state trattate tutte le operazioni tra frazioni, bensì mancavano la sottrazione e la divisione – l'addizione e la moltiplicazione erano state spiegate con la rappresentazione matematica di sequenze ritmiche e melodiche: vd. *supra*, punti *3)* e *4)* – si è deciso di affrontare la sfida, di tipo intellettuale. Questa sfida al momento si è risolta solo sul piano della sottrazione tra frazioni.[20] L'argomento

[20] La divisione non è ancora stata affrontata: per questo *Doremat* rimane un progetto di ricerca scientifica e didattica aperta a ulteriori sviluppi.

dell'appoggiatura trattato mediante la sottrazione tra frazioni corrisponde ad una concretizzazione musicale di una rappresentazione astratta, o, in altri termini, ad una matematizzazione della realtà. Sul piano generale della formazione, promuovere questo processo di pensiero significa dotare gli studenti di capacità di generalizzazione a partire dall'osservazione analitica di dati concreti.

10) La *conoscenza e la comprensione del canone musicale*, e l'*invenzione di un canone*, che nel volume del 2015 erano state affrontate con l'argomento geometrico della *traslazione*, anche rappresentata su un piano cartesiano, nella pubblicazione del 2018 sono state incrementate. La traslazione in geometria è uno spostamento rigido di una figura su un piano. Lo spostamento si definisce rigido perché la figura non può essere deformata. Inoltre, lo spostamento avviene al massimo su due direzioni (potrebbe avvenire anche su una sola direzione), cioè su due rette disposte in vario modo, e comunque tra loro incidenti (che si toccano in un punto). Nel volume del 2015 era stata trattata la traslazione disegnando il profilo di una melodia attraverso il piano cartesiano. Questo lavoro è stato utile a visualizzare in modo grafico matematico dapprima una sola linea melodica e poi le varie linee melodiche di un canone. Per esempio, nel caso di una sola melodia, dato il noto tema *Ah vous dirai-je maman* KV 265 di Wolfgang Amadeus Mozart (Es. mus. 1),



Esempio musicale 1 – Melodia del tema delle Variazioni su *Ah vous dirai-je maman* KV 265 di W. A. Mozart.

se ne realizza la rappresentazione cartesiana indicando le altezze sull'asse verticale, quello delle ordinate, attraverso l'indicazione numerica delle loro frequenze espresse in Hertz (do$_3$ - do$_3$ - sol$_3$ - sol$_3$ - la$_3$ - la$_3$ - sol$_3$: 261,6 - 261,6 - 392 - 392 - 440 - 440 - 392), e ponendo le durate sull'asse orizzontale, quello delle ascisse, ove si assume come unità di base la durata della semiminima, pari al segmento indicato nell'esempio (che è di 5mm, anche se qui la misura della lunghezza del segmento non è essenziale). Ne deriva la seguente rappresentazione del tema mozartiano, corrispondente ad una figura piana (Fig. 14):

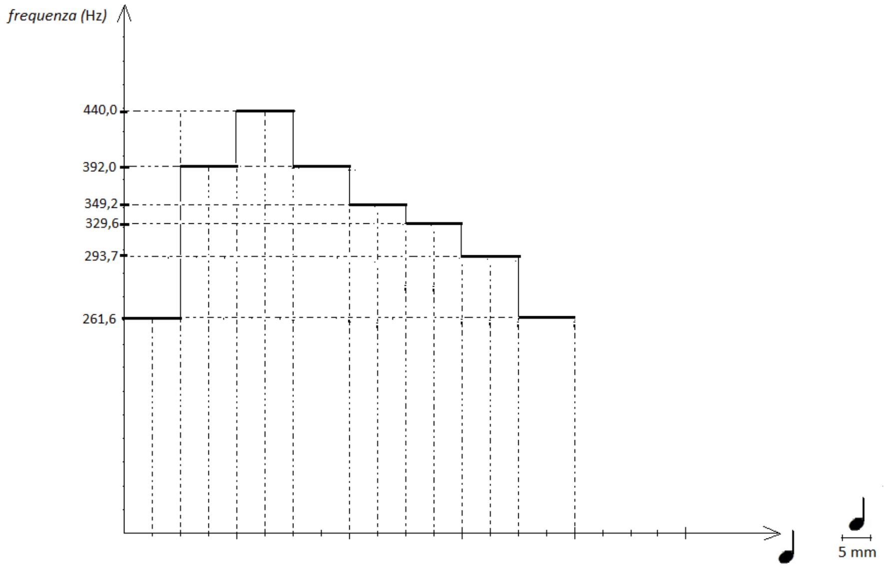


Figura 14 – Rappresentazione cartesiana della melodia delle Variazioni su *Ah vous dirai-je maman* KV 265 di W. A. Mozart

Una volta che gli studenti avranno imparato a disegnare su un piano cartesiano una singola melodia, essi potranno capire che, quando lo stesso procedimento si applichi a un canone musicale, come ad esempio al celebre *Fra' Martino campanaro* (Es. mus. 2),

ISSN 2039-9715

Esempio musicale 2 – Il noto canone *Fra' Martino campanaro*, qui trascritto a tre parti.

si ottiene la traslazione geometrica delle varie linee melodiche del canone (vd. Fig. 15; per una questione di spazio qui a disposizione per l'immagine di Fig. 15, sono state rappresentate sul piano cartesiano soltanto le prime quattro battute e le prime due parti):

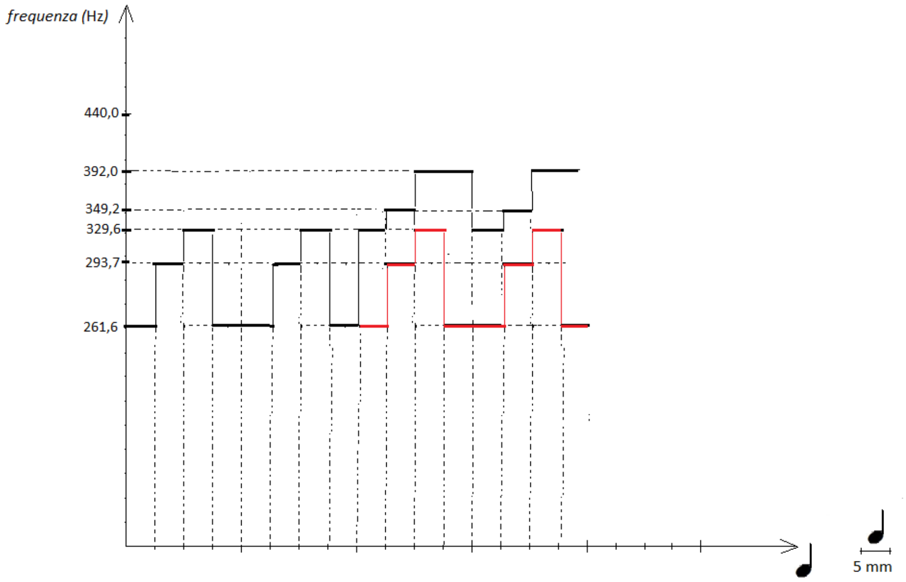


Figura 15 – Rappresentazione cartesiana delle prime quattro battute, e delle sole prime due parti, del canone *Fra' Martino campanaro*.

Anche in questo esempio le note sono tradotte in numeri che esprimono le frequenze, le quali sono poste in ordinata (do_3-re_3-mi_3-do_3..: 261,6-293,7-329,6-261,6…), mentre le durate delle note sono indicate in ascissa (la semiminima è pari alla lunghezza del segmento, che si è fatto corrispondere in figura, e che è sempre di 5 mm). In riferimento alla Fig. 15, è tracciata di colore nero la figura piana che rappresenta la linea melodica della prima parte, mentre in rosso la figura piana che rappresenta la linea melodica della seconda parte. Questo lavoro consente agli studenti di osservare che, sovrapponendo la figura rossa alla figura nera, cioè traslando la prima sulla seconda, le due figure coincidono, e dunque la figura rossa è la traslata di quella nera.

Nella pubblicazione del 2018 tutto questo lavoro è stato approfondito mediante il collegamento all'argomento musicale del trasporto, nel modo qui di seguito esemplificato. Agli studenti si propone di eseguire la nota melodia del tema mozartiano di cui nell'Es. mus. 1. Con l'ausilio di una tastiera si chiede loro di calcolare quanti tasti bianchi e neri ci siano a partire da un determinato suono del tema fino al suono di arrivo, conteggiando entrambi i tasti di partenza e di arrivo. Quando vi sia un unisono, il conteggio dei due tasti è pari a 0. Pertanto: tra i due do_3 iniziali del tema mozartiano, che hanno la stessa altezza, il numero di tasti è 0; tra il secondo do_3 e il primo sol_3 del tema il numero di tasti è 8; e così via. Gli studenti ottengono la sequenza numerica corrispondente all'intera melodia (Fig. 16):

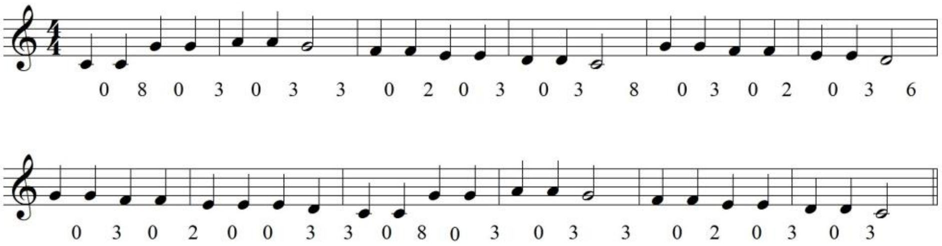


Figura 16 – Conteggio del numero di tasti (bianchi e neri) che intercorrono tra un suono e l'altro della melodia mozartiana di Es. mus. 1.

La sequenza numerica costituisce la traccia per scrivere una nuova melodia, ad essa abbinata, ma a partire da una nota (un'altezza) diversa da do: gli studenti scoprono così che la nuova melodia che si può comporre in base alla sequenza numerica suona come la melodia originaria, pur partendo da una nota diversa. Essi apprendono dunque il procedimento del trasporto, che essendo pure uno spostamento di una melodia a un'altezza diversa, corrisponde in geometria alla traslazione della melodia stessa (sebbene ciò avvenga in maniera non rigorosa dal punto di vista matematico, per motivi specificati di seguito, nella spiegazione di Fig. 17)[21].

Consolidato questo apprendimento, gli studenti provano a inventare alcune sequenze melodiche utilizzando la stessa sequenza numerica del tema mozartiano (vd. Fig. 16), ma invertendo la direzione degli intervalli (premesso che gli studenti non conoscono la classificazione degli intervalli, ma appunto imparano il trasporto con il sistema di numerazione sopra descritto, si farà osservare che nell'Es. mus. 3 la quinta giusta ascendente diventa una quinta giusta discendente; la seconda maggiore ascendente diventa una seconda maggiore discendente; e così via), pur a partire dallo stesso do_3. Essi ottengono così una melodia inversa (Es. mus. 3):

Esempio musicale 3 – Melodia inversa delle prime 4 battute di quella mozartiana di Es. mus. 1.

[21] Il trasporto si potrebbe applicare anche alle dodici variazioni che, nella composizione di Mozart, seguono il tema mozartiano qui citato, per sviluppare un possibile percorso didattico così come esemplificato in Chiara Sintoni, *Music Listening, Composition, and Performance: An Experience of Creativity for Education*, in *Multidisciplinary Contributions to Science of Creative Thinking*, a cura di G. E. Corazza e S. Agnoli, Singapore, Springer, 2016, pp. 301-323.

e poi uniscono in un unico periodo musicale l'originale tema mozartiano (bb. 1-4) e la melodia inversa dell'Es. mus. 3 (bb. 5-8; Es. mus.4) per realizzarne la corrispondente rappresentazione su un piano cartesiano, nello stesso modo delle Figg. 14 e 15 (Fig. 17):

Esempio musicale 4 – Le prime 4 battute della melodia mozartiana di Es. mus. 4 e la loro inversione.

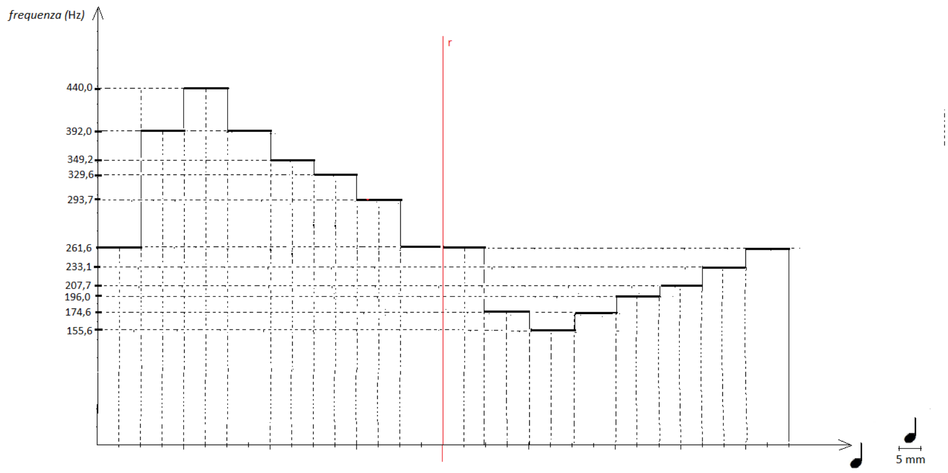
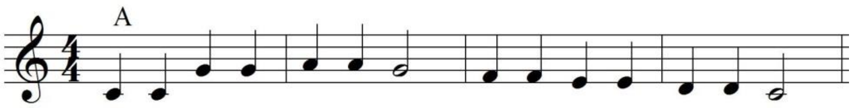


Figura 17 – Rappresentazione cartesiana della melodia di Es. mus. 4.

Lo scopo dell'unione delle due frasi musicali in un unico periodo musicale è di farne una rappresentazione cartesiana per ottenere due figure piane corrispondenti e per coglierne graficamente, sul piano matematico, il rapporto. Nella Fig. 17, la figura che rappresenta l'originale melodia mozartiana è a sinistra della retta r e quella inversa composta dagli studenti è a destra della stessa. Emerge che le due figure non sono esattamente identiche tra loro, dunque la seconda a destra non è la traslata della prima a sinistra, perché le distanze tra le frequenze della prima melodia sono diverse dalle distanze delle frequenze della seconda melodia. In termini aritmetici, riferiti alle frequenze, si ha infatti quanto segue: tra il do$_3$ (261,6 Hz) e il sol$_3$ (392 Hz) iniziali della melodia mozartiana c'è una distanza di 130,4 Hz, ottenuta attraverso la sottrazione alla frequenza del sol$_3$ della frequenza del do$_3$ (392-261,6=130,4); tra il do$_3$ (261,6 Hz) e il fa$_2$

(174,6 Hz) della melodia inversa c'è una distanza di 87 Hz (261,6-174,6).[22] In definitiva, le due figure geometriche corrispondenti alle due frasi musicali non sono identiche ma simili. Questa comprensione attraverso il grafico cartesiano è utile a sviluppare competenze visivo-spaziali, per giungere a rappresentarsi mentalmente non solo le figure piane, in geometria, ma anche i rapporti tra varie linee melodiche, in musica. Da quest'ultimo punto di vista, inoltre, un tale processo di lavoro insegna a capire il senso matematico della scrittura in moto inverso, propria della tecnica contrappuntistica, e costituisce un ponte per aprire la possibilità di collegare altri aspetti di questa tecnica all'argomento delle simmetrie assiali, come emerge dal seguente punto *11)*.

11) L'*invenzione di sequenze melodiche, strutturate su forme semplici* è stata affrontata nel volume del 2015 mediante le *simmetrie assiali*. Nondimeno, nella seconda pubblicazione le stesse simmetrie assiali sono state sviluppate mediante la composizione di sequenze melodiche per moto retrogrado (e non solo). Si consideri ad esempio la prima frase, ossia le prime 4 battute della già citata melodia *Ah vous dirai-je maman* di Mozart (Es. mus. 5):



Esempio musicale 5 – Prime 4 battute della melodia mozartiana di Es. mus. 1.

Gli studenti sono invitati a comporre una sequenza melodica, basata sulla sequenza numerica già utilizzata per la melodia mozartiana (nella Fig. 16), ma procedendo all'indietro, ossia in senso retrogrado o "cancrizzante" (partendo dall'ultima nota del tema di Mozart verso la prima, cioè mantenendo le stesse note e le medesime durate, come pure gli intervalli, ma invertendo la direzione di questi ultimi):

Esempio musicale 6 – Il retrogrado della melodia mozartiana di Es. mus. 5.

[22] Ci si potrebbe chiedere perché nella figura di sinistra si sottrae alla frequenza maggiore (sol$_3$) la frequenza minore (do$_3$) e invece nella figura di destra si fa il contrario. Premesso che, se ciò si facesse, si otterrebbe un numero negativo (infatti se alla frequenza del fa$_2$ sottraessimo la frequenza del do$_3$, avremmo: 174,6-261,6= -87), in matematica al concetto di distanza si attribuisce un valore, ossia un numero, positivo. Il numero non può essere negativo, perché non avrebbe senso dire che la distanza tra due oggetti è, ad esempio, -87, in quanto la distanza non esisterebbe; pertanto diciamo che la distanza è di 87, considerando sottointeso il segno positivo.

Essi vengono invitati poi a scrivere le due frasi una di seguito all'altra, ottenendo questo periodo musicale:

Esempio musicale 7 – Le prime 4 battute della melodia mozartiana di Es. mus. 1 e il loro retrogrado.

Certo, il risultato sonoro-musicale non è granché: ci sono molti esempi artistici che si sarebbero potuti trarre dalle composizioni di Johann Sebastian Bach; ma esse sono complesse, e non avrebbero permesso agli studenti di comprendere subito il preciso significato matematico del concetto di simmetria, da riconoscere poi eventualmente, nei suoi vari tipi, nelle composizioni bachiane. In *Doremat* si è proceduto con gradualità, collegando le esemplificazioni musicali alla visualizzazione grafica matematica. Pertanto, giunti alla scrittura musicale dell'Es. mus. 7, gli studenti imparano a rappresentare le due frasi che lo compongono (la prima: bb .1-4; la seconda: bb. 5-8) su un piano cartesiano e, osservandolo visivamente, a rispondere ad un interrogativo importante: perché, nella rappresentazione cartesiana, si può dire che le due frasi musicali formano una simmetria?

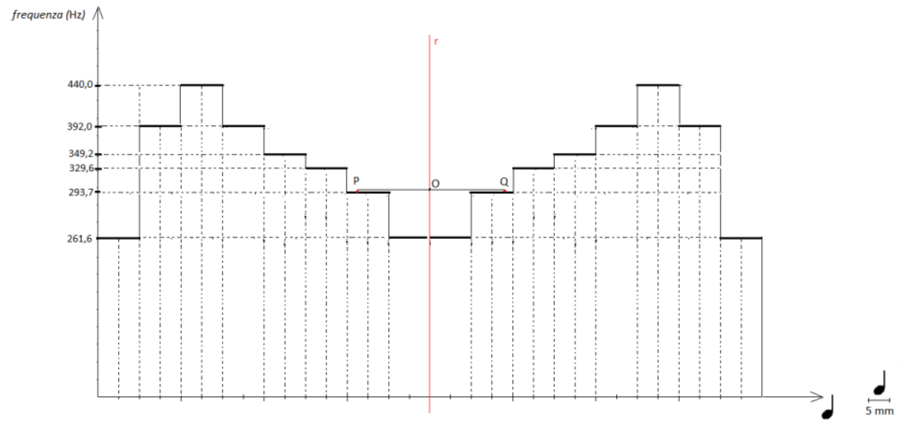


Figura 18 – Rappresentazione cartesiana della melodia di Es. mus. 7.

La risposta non può che essere la seguente: poiché le due frasi musicali sono qui raffigurate da due figure piane, rispettivamente a sinistra e a destra della retta r (nella Fig. 18 evidenziata in rosso), preso un qualsiasi punto della figura a sinistra, per esempio P, esso ha una distanza dalla retta r pari alla distanza del suo corrispondente nella figura a destra dalla medesima retta, e cioè Q. In altri termini, la lunghezza del segmento P-O è identica alla lunghezza del segmento Q-O; e così per gli altri punti delle due figure. Queste, e dunque le due frasi musicali che esse rappresentano, si corrispondono in una simmetria assiale, che a sua volta rappresenta matematicamente il moto retrogrado in musica.

Nelle due pubblicazioni del 2015 e del 2018 sono stati affrontati anche altri assi di simmetria, oltre quello verticale delle esemplificazioni sopra riportate, e in particolare l'asse di simmetria orizzontale (parallelo all'asse delle ascisse), sui quali però non mi soffermo per ragioni di brevità.

In definitiva, se storicamente i saperi musicali e matematici sono collegati da una lunga tradizione, e molti sono gli studi in questo àmbito che ne dimostrano i rapporti, non altrettanto avviene sul piano didattico. Dal principio ai suoi sviluppi, *Doremat* ha evidenziato che le due discipline hanno due "forme linguistiche" che in didattica si coadiuvano e si completano. Così come i contenuti trattati nelle due pubblicazioni qui citate sono essenziali per maturare sul piano della Matematica competenze di analisi, sintesi, calcolo, rappresentazione aritmetica, algebrica, o geometrica, gli stessi sul piano della Musica permettono lo sviluppo di competenze di lettura, scrittura, teoria, analisi musicale, ascolto ed esecuzione, e anche minime competenze nell'invenzione musicale, per esempio di strutture ritmiche prima semplici, poi complesse ché pensate per l'esecuzione di più voci o strumenti, dove la polifonia è trattata con semplici equazioni lineari, e non con sistemi di equazioni, in forma di duo, e con espressioni aritmetiche). Per entrambe le discipline, inoltre, gli studenti maturano competenze linguistiche specifiche assai elevate.

Nel concludere, desidero segnalare che l'integrazione tra le due discipline sul piano didattico presenta ancora diversi punti problematici che sono rimasti irrisolti, e sui quali i ricercatori e gli insegnanti che hanno lavorato a questo progetto si interrogano: per tali ragioni *Doremat* prevede un suo prosieguo. Ma il lavoro svolto sino ad oggi, e soprattutto i risultati ottenuti, permettono di sostenere che questo progetto, puntando agli obiettivi di sviluppo delle competenze matematiche e del pensiero scientifico, mediante il recupero dell'orizzonte culturale della musica, e pure promuovendo le competenze musicali di lettura, scrittura, esecuzione, composizione e improvvisazione musicali, attraverso la formalizzazione matematica, rimotiva i giovani allo studio, amplia lo spettro dei linguaggi didattici possibili e favorisce l'inclusione di allievi con disagio e difficoltà di astrazione, concentrazione, disturbi cognitivi e disabilità sensoriali. È proprio nell'integrare gli aspetti intellettuali ed emotivi, sia della Matematica sia della Musica, nonché le dimensioni teorica e tecnico-procedurale, il fare e il riflettere, le esperienze scientifiche con quelle estetiche, che *Doremat* si presenta quale formidabile strumento per l'apprendimento efficace di due saperi "difficili" e, con esso, per una vera emancipazione etico-sociale.

carla.cuomo@unibo.it

ISSN 2039-9715

APPENDICE

Tabella delle "scuole *Doremat*"
(a cura di Rachele Vagni)

DENOMINAZIONE SCUOLA	TIPO DI SCUOLA	ANNI SCOLASTICI di sperimentazione di *Doremat*	SUPERVISIONE da parte di alcuni autori di *Doremat* (2015)
ENFAP Ente Nazionale Formazione Apprendimento Professionale Forlì – Emilia Romagna	Istituto d'Istruzione e Formazione professionale	dal 2007 al 2017	si
(*) Istituto Professionale "Roberto Ruffilli" Forlì – Emilia Romagna	Istituto di Istruzione Superiore scuola professionale	a.s. 2012/2013	si
(*) Istituto Professionale "Persolino Strocchi" Faenza – Emilia Romagna	Istituto professionale Statale servizi commerciali e servizi per l'agricoltura	a.s. 2012/2013	si
(*) Istituto Calasanzio Empoli – Toscana	Liceo scientifico	a.s. 2012/2013	si
(*) Liceo Artistico "G. Chierici" Reggio Emilia – Emilia Romagna	Liceo Artistico Statale	a.s. 2012/2013	si
(*) Marupe Secondary school Riga – Lettonia	Scuola secondaria di secondo grado	a.s. 2012/2013	si, a distanza
(*) Jelgava Spidola Gymnasium Riga – Lettonia	Scuola secondaria di secondo grado	a.s. 2012/2013	si, a distanza
Fondazione Aldini Valeriani Bologna – Emilia Romagna	Scuola di Industrial Management di Confindustria con percorsi di formazione, tra i quali quelli di istruzione e formazione professionale	a.s. 2013-2014	si
IAL Innovazione Apprendimento Lavoro Ferrara, Cesenatico e Riccione – Emilia Romagna	Istituto d'Istruzione e Formazione professionale	a.s. 2013-2014	si
Oficina s.r.l. Bologna – Emilia Romagna	Impresa sociale Corsi di Istruzione e Formazione professionale	a.s. 2013-2014	si
Istituto comprensivo n. 1 "G. Rodari" San Lazzaro di Savena – Emilia Romagna	Scuola secondaria di primo grado	a.s. 2014-2015	si
Istituto comprensivo n. 2 "C. Jussi" San Lazzaro di Savena – Emilia Romagna	Scuola secondaria di primo grado	a.s. 2014-2015	si

Istituto comprensivo n. 5 "P. Squadrani" e "L. Tempesta" Forlì – Emilia Romagna	Scuola primaria	a.s. 2016-2017	si
Istituto comprensivo Porto Garibaldi Comacchio – Emilia Romagna	Scuola primaria	a.s. 2017-2018	si
Istituto comprensivo "E. Fermi" Reggio Emilia – Emilia Romagna	Scuola secondaria di primo grado	a.s. 2017-2018 e ancora in corso	si
Istituto comprensivo "G. Pascoli" Silvi – Abruzzo	Scuola primaria	aa.ss. 2016-2019	no (adottato nel PTOF triennale)
Istituto comprensivo di Cogorno Cogorno – Liguria	Scuola primaria e secondaria di primo grado	aa.ss. 2016-2019	no (adottato nel PTOF triennale)
Istituto di Istruzione Secondaria Superiore "R. Luxemburg" Acquaviva delle Fonti – Puglia	Istituto professionale servizi culturali e dello spettacolo e servizi per la sanità e l'assistenza sociale	aa.ss. 2016-2019	no (adottato nel PTOF triennale)
Istituto comprensivo Rudiano Rudiano – Lombardia	Scuola primaria e secondaria di primo grado	a.s. 2016-2017	no (corso di formazione per gli insegnanti tenuto da personale della scuola)
Istituto d'Istruzione Secondaria "ITI-ITG" Vibo Valentia	Istituto tecnico industriale e Istituto tecnico per geometri	a.s. 2018-2019	Realizzato da personale docente interno (senza la presenza degli autori)

(*) Scuole che hanno aderito alla sperimentazione scientifica con il "Progetto Leonardo".

ISSN 2039-9715